Um bei der Werteentwicklung einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ festzustellen, ob ihre Werte ansteigen, gleich bleiben oder fallen, können wir zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder miteinander vergleichen: Gilt beispielsweise für die Differenzenfolge $(d_n)_{n \geq 1}$ mit $d_n := a_n - a_{n-1}$, dass $d_n > 0$ für alle $n \geq 1$ ist, so handelt es sich bei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ um eine streng monoton wachsende Folge. Ist für alle $n \geq 1$ jeder Wert der Differenzenfolge negativ, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend. Der Betrag $|d_n|$ beschreibt dabei das Ausmaß des Wachstums oder Gefälles von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ vom Folgenindex $n-1$ zum Index n.

Wie können wir jedoch ein Wachstumsmaß für eine Funktion definieren? Eine Funktion besteht aus einer Wertefortschreibung einer Größe $f(x)$ in Abhängigkeit einer kontinuierlichen Variablen x. Der Ansatz, zum Wachstum einfach zwei Funktionswerte $f(x)$ und $f(y)$ für $x < y$ miteinander zu vergleichen, kann nicht für das Wachstumsverhalten der Funktion im Intervall $[x, y]$ herangezogen werden. Dies hat zwei Gründe. Zum einen wäre die bloße Differenz $d(x) = f(y) - f(x)$ nicht aussagekräftig für das Ausmaß des Wachstums, ohne dass die Intervalllänge $y - x$, innerhalb der es zu diesem Wachstum gekommen ist, mit berücksichtigt würde. Zum anderen könnte innerhalb des Intervalls $[x, y]$ die Funktion durchaus nicht monoton sein, sodass mit dem auf die Intervalllänge bezogenen Wachstumsmaß $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ allenfalls eine durchschnittliche Wachstumsrate gegeben ist.

Ein Praxisbeispiel verdeutlicht dieses Problem sehr anschaulich. Wenn bei einer Geschwindigkeitsmessung durch die Polizei die Zeit gestoppt wird, die ein Fahrzeug für eine bestimmte Strecke benötigt hat, so gibt dies die durchschnittliche Geschwindigkeit des Fahrzeugs innerhalb des Messzeitraums wieder. Selbst wenn diese Durchschnittsgeschwindigkeit unterhalb der Geschwindigkeitsbegrenzung liegen sollte, kann es dennoch möglich sein, dass das Fahrzeug innerhalb der Messstrecke die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschritten hat, zum Ausgleich aber dafür auch zeitweise unterhalb der Höchstgeschwindigkeit lag. Wir müssen bei dieser Fragestellung also unterscheiden zwischen durchschnittlicher Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit. Wir werden feststellen, dass die Frage nach einer momentanen Änderungsrate zu einer Grenzwertfrage führt.

6.1 Differenzen- und Differenzialquotient

Wir beginnen mit einem Motivationsbeispiel: Bei einem Wasserspeicher gemäß Abb. 6.1 wird der Zufluss des Wassers über ein Füllventil geregelt. Entsprechend dient ein Entnahmeventil zur Steuerung des Abflusses.

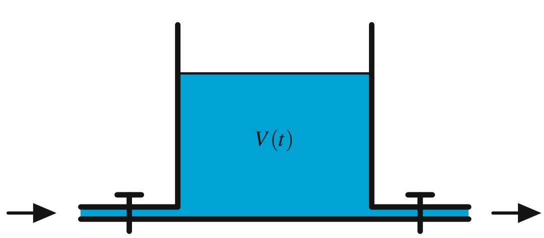

Abb. 6.1 Wasserspeicher mit Zu- und Abflussrohr

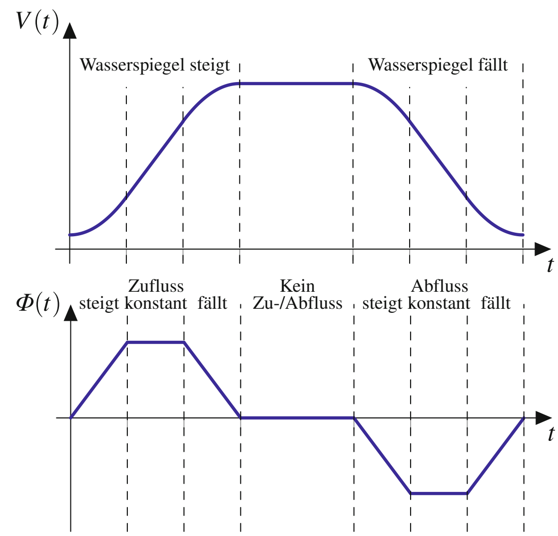

Abb. 6.2 Füllvolumen $V(t)$ und Zuflussrate $\Phi(t)$ als Funktionen der Zeit t

Befüllungs- und Entnahmeprozesse (evtl. sogar in Kombination) lassen den Füllstand des Wasserspeichers als Funktion der Zeit erscheinen. Ein Beispiel zeigt Abb. 6.2. Zu Beginn, d. h. zum Zeitpunkt $t = 0$, wird bei geschlossenem Entnahmeventil das Füllventil geöffnet, sodass der Füllstand gleichmäßig, d. h. mit konstantem Durchfluss, ansteigt. Während des Öffnens und des Schließens ist der Durchfluss nicht konstant. Beim Öffnen steigt die Durchflussrate auf den maximalen Durchflusswert an, während beim Schließen des Füllventils die Durchflussrate von diesem Maximalwert wieder auf 0 geregelt wird.

Die Durchflussrate wird entsprechend der einzelnen Phasen der Befüllung und der Entnahme in Abb. 6.2 gezeigt.

Die Änderungsrate einer Funktion kann als Grenzwertprozess definiert werden

Ein weiteres Beispiel stellt der Zusammenhang zwischen zurückgelegter Strecke eines Fahrzeugs, seiner Geschwindigkeit und seiner Beschleunigung dar (Abb. 6.3). Hierbei beschreibt $s(t)$ die Fahrtstrecke in der Einheit km, $v(t)$ die Geschwindigkeit in km/h und $a(t)$ die Beschleunigung in km/h^2 jeweils als Funktion der Zeit t, die in Stunden (h) angegeben wird.

Wie und unter welchen Bedingungen gelangt man nun zu einer geeigneten Definition einer Funktion, welche die Änderungsrate einer weiteren Funktion beschreibt, etwa so, wie die Geschwindigkeit die Änderungsrate der Fahrtstrecke, die Beschleunigung die Änderungsrate der Geschwindigkeit und die Zuflussfunktion die Änderungsrate des Volumens beschreibt? Änderung bedeutet Differenz. Da aber die bloße Differenz zweier Funktionswerte nichts aussagt, wenn dies nicht mit der Differenz ihrer

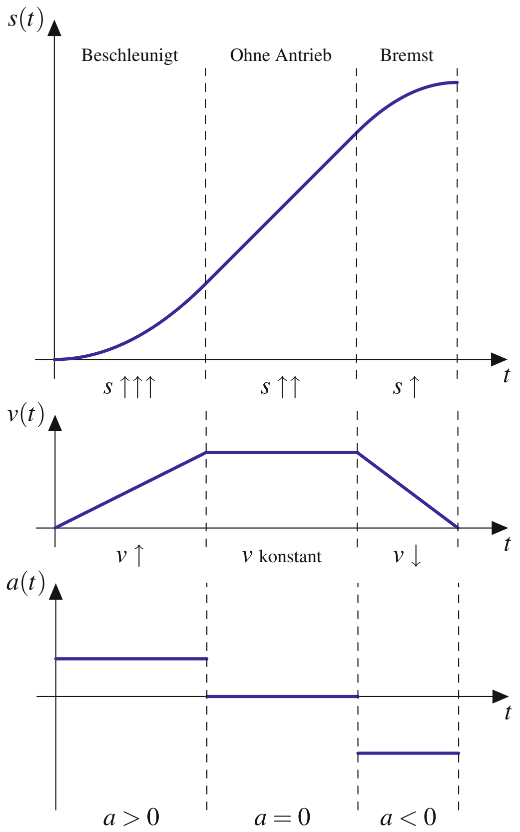

Abb. 6.3 Fahrtstrecke s, Geschwindigkeit v und Beschleunigung a eines Fahrzeugs jeweils als Funktion der Zeit t

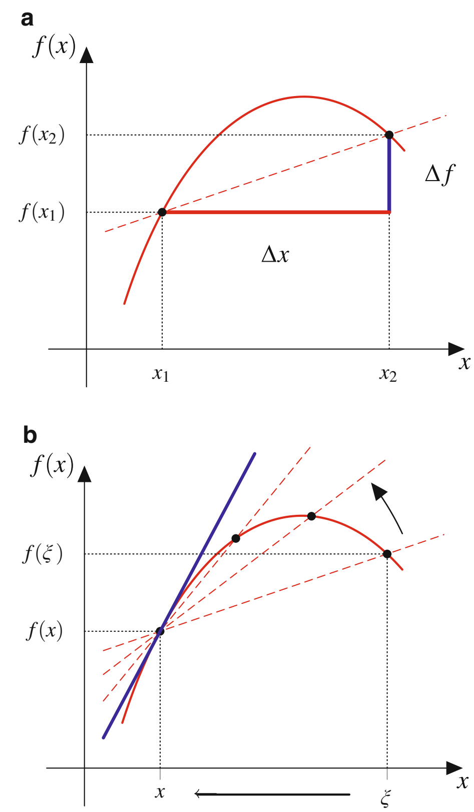

Abb. 6.4 Differenzenquotient und Sekantensteigung (**a**) sowie Differenzialquotient und Tangentensteigung (**b**)

zugehörigen t- bzw. x-Werte verglichen wird, reicht eine derartige einfache Differenz nicht aus. Stattdessen betrachten wir das Verhältnis beider Differenzen und bilden auf diese Weise den Differenzenquotienten, aus dem dann per Grenzwertbildung der Differenzialquotient wird.

Definition: Differenzenquotient und Differenzialquotient

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Für $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ und $[x_1, x_2] \subset D$ heißt der Bruch

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

  Differenzenquotient: Dieses Verhältnis beschreibt die mittlere Änderungsrate von f in dem Intervall $[x_1, x_2]$. Grafisch kann dieser Wert als Steigung der Geraden (Sekante) durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ interpretiert werden (Abb. 6.4a).
- Für $x \in D$ heißt (im Fall der Existenz) der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} =: f'(x)$$

  Differenzialquotient oder Ableitung von f an der Stelle x. In dieser Situtation wird die Funktion f als differenzierbar an der Stelle x oder als differenzierbar in x bezeichnet. Die Ableitung $f'(x)$ gibt die momentane Änderungsrate von f an der Stelle x an (Abb. 6.4b). Der Ausdruck $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ wird ausgesprochen als „df nach dx".

Existiert der Differenzialquotient einer Funktion $f(x)$ in jedem $x \subset I$ eines Intervalls I, so definiert die Ableitung in x eine weitere Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$.

Definition: Differenzierbarkeit

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn f in jedem $x \in I$ differenzierbar ist, falls also für alle $x \in I$ der Grenzwert (Differenzialquotient)

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

existiert. Die Abbildung $f' : I \to \mathbb{R}$, die jedem $x \in I$ den Wert $f'(x)$ zuweist, heißt Ableitungsfunktion oder kurz

Teil II

Ableitung von f. Das Bestimmen der Ableitungsfunktion f' wird als Differenzieren der Funktion f bezeichnet.

Eine komplexwertige Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = a(x) + \mathrm{i}b(x)$ und $a(x), b(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I$ heißt differenzierbar, wenn sowohl ihre Realteilfunktion $a(x)$ als auch ihre Imaginärteilfunktion $b(x)$ differenzierbar sind. Als Ableitung wird die aus beiden Ableitungen zusammengesetzte Funktion $f'(x) = a'(x) + \mathrm{i}b'(x)$ bezeichnet.

Ist nun $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion, so ist uns anschaulich klar, dass ihre Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ als Wachtumsmaß zumindest keine negativen Werte aufweisen kann. Wir weisen diesen Zusammenhang einmal rechnerisch nach. Es seien $x, y \in I$ mit $x < y$. Aufgrund der Differenzierbarkeit von f gilt für jedes $x \in I$

$$f'(x) = \lim_{h \nearrow 0} \underbrace{\frac{1}{h}}_{<0} \cdot \underbrace{(f(x+h) - f(x))}_{<0,\text{ da } h<0} \geq 0,$$

$$f'(x) = \lim_{h \searrow 0} \underbrace{\frac{1}{h}}_{>0} \cdot \underbrace{(f(x+h) - f(x))}_{>0,\text{ da } h>0} \geq 0.$$

Wir beachten dabei, dass zwar in beiden Fällen

$$\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) > 0$$

gilt, nach Grenzübergang aber nur die schwache Ungleichung folgt. Im Fall einer streng monoton fallenden Funktion folgt in entsprechender Weise $f'(x) \leq 0$. Gilt umgekehrt $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in I$, so kann gezeigt werden, dass f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) ist. Dieser Nachweis (s. Aufgabe 8.3) gelingt sehr elegant mit dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, den wir in Kap. 8 behandeln.

Die Nulldurchgangsstellen der Ableitung einer Funktion sind ihre Monotoniewechselstellen

Wir stellen in Tab. 6.1 den einfachen Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten einer differenzierbaren Funktion f und den Werten ihrer Ableitung f' (Abb. 6.5) fest. Eine Stelle x, bei der die Funktion f einen Monotoniewechsel vollzieht, heißt lokale Extremalstelle. In einer lokalen Extremalstelle besitzt die Funktion f ein lokales Extremum. Im Fall eines Wechsels von wachsender auf fallende Monotonie besitzt f ein lokales Maximum, umgekehrt ein lokales Minimum. Diese Monotoniewechselstellen von f sind also gekennzeichnet durch einen Nulldurchgang der Ableitung f'. In einer lokalen Extremalstelle x von f besitzt die Ableitung eine Nullstelle, d. h. $f'(x) = 0$. Mithilfe der Ableitung besteht also die Möglichkeit, eine differenzierbare Funktion auf lokale Minima und Maxima hin zu untersuchen.

Tab. 6.1 Vorzeichen der Ableitung und Monotonie

Ableitung		Funktion
$f' > 0$	$\Rightarrow$	f ist streng monoton wachsend
$f' < 0$	$\Rightarrow$	f ist streng monoton fallend
f' vollzieht bei x einen Nulldurchgang von $-$ nach $+$	$\Rightarrow$	f besitzt in x ein lokales Minimum
f' vollzieht bei x einen Nulldurchgang von $+$ nach $-$	$\Rightarrow$	f besitzt in x ein lokales Maximum

Geometrisch kann die Ableitung $f'(x)$ als die Steigung der Tangente im Punkt $(x, f(x))$ an den Graphen von f interpretiert werden (Abb. 6.4b). Der Grenzübergang vom Differenzenquotienten $\Delta f/\Delta x$ für $\Delta x \to 0$ gegen den Differenzialquotienten $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ entspricht geometrisch einer zur Tangente werdenen Sekante, indem die beiden die Sekante definierenden Punkte zusammenlaufen. Die Ableitung $f'(x) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ stellt ein Maß für das momentane Wachstum der Funktion f an der Stelle x dar. So ist beispielsweise die Ableitung einer nach der Zeit t parametrisierten zurückgelegten Wegstrecke $s(t)$ die Geschwindigkeit $v(t) = \mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$, während die Beschleunigung als Ableitung der Geschwindigkeit oder als Ableitung der Ableitung (zweite Ableitung) der Wegstrecke betrachtet werden kann.

Welchen Sinn hat die momentane Änderungsrate $f'(x)$ einer Funktion f an der Stelle x im Vergleich zur mittleren Änderungsrate von f, im Intervall $[x_1, x_2]$, die durch den Differenzenquotienten $\Delta f/\Delta x = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ angegeben wird? Diese

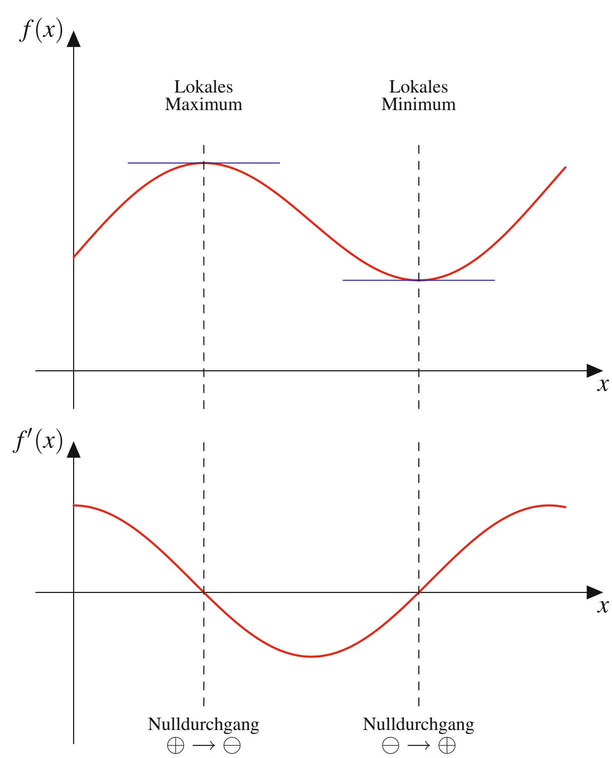

Abb. 6.5 Funktion f und Ableitung f'

Frage lässt sich anschaulich an dem eingangs erwähnten Praxisbeispiel der Geschwindigkeitsmessung illustrieren. Gerät man mit einem Fahrzeug in eine Geschwindigkeitskontrolle, so ist die momentane Geschwindigkeit $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$ zum Zeitpunkt t der Messung dafür ausschlaggebend, ob eine Ordnungswidrigkeit vorliegt, selbst wenn die über einen Zeitraum $[t_1, t_2]$ gemittelte Geschwindigkeit $\Delta s(t)/\Delta t = \frac{s(t_1)-s(t_2)}{t_1-t_2}$ unterhalb der maximal erlaubten Geschwindigkeit liegt.

Die bisherigen Beispiele zeigen zudem, wie sich die Einheit der Ableitung $f'(x)$ aus den Einheiten von $f(x)$ und x ergibt.

Einheit der Ableitung

Beschreibt $f(x)$ eine Messgröße in Abhängigkeit einer weiteren Messgröße x, so ist, im Fall der Differenzierbarkeit in x, die Einheit der Ableitung $f'(x)$ der Quotient aus der Einheit von f und der Einheit von x.

Beispiel

Es beschreibe $s(t)$ die von einem Fahrzeug zurückgelegte Wegstrecke zum Zeitpunkt t. Die Einheit von s sei Kilometer (km), während die Zeit in Stunden (h) angegeben werde. Dann ist die Geschwindigkeit $v(t) = \mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$ eine Messgröße, deren Einheit aus dem Quotienten Kilometer pro Stunde (km/h) besteht. Sie gibt also an, um wie viele Kilometer pro Stunde sich der Weg ändert. Die Beschleunigung $a(t) = \mathrm{d}v(t)/\mathrm{d}t$ besitzt demnach die Einheit Kilometer pro Stunde pro Stunde bzw. Kilometer pro Quadratstunde (km/h^2) und gibt an, um wie viele Kilometer pro Stunde sich die Geschwindigkeit in jeder Stunde ändert.

Wird das Füllvolumen $V(t)$ des Wasserpeichers in Liter (l) angegeben und die Zeit t in Sekunden (s) gemessen, so gibt die Durchflussrate $\Phi(t)$ an, um wieviel Liter pro Sekunde (l/s) sich das Füllvolumen ändert. ◀

Die Ableitung definiert eine Tangente zur linearen Näherung der Funktion

Ist eine Funktion $f : D :\to \mathbb{R}$ in einem Punkt $\xi \in D$ differenzierbar, so besteht die Möglichkeit, die Funktion durch ihre Tangente in ξ zu nähern, also linear zu approximieren. Hierzu bestimmen wir zunächst den Funktionsterm der Tangente. Da es sich bei der Tangente um eine lineare Funktion handelt, besitzt die Tangente den Term $T(x) = mx + b$. Hierbei ist $m = f'(\xi)$ die Steigung von f an der Stelle ξ und b der y-Achsenabschnitt von T. Um b zu bestimmen, folgen wir dem Ansatz

$$T(\xi) = m\xi + b = f'(\xi)\cdot\xi + b \stackrel{!}{=} f(\xi),$$

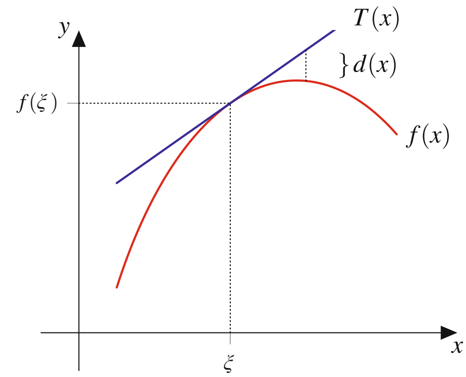

Abb. 6.6 Lineare Approximation

woraus sich

$$b = f(\xi) - f'(\xi)\cdot\xi$$

ergibt. Die Tangente besitzt damit den Funktionsterm

$$T(x) = f'(\xi)\cdot x + f(\xi) - f'(\xi)\cdot\xi = f(\xi) + f'(\xi)\cdot(x-\xi).$$

Die Approximation $f(x) \approx T(x)$ ist exakt in $x = \xi$. Auf jeden Fall gilt

$$f(x) = T(x) + d(x)$$

mit einer Fehlerfunktion $d(x)$, für die der Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\xi}\frac{d(x)}{x-\xi} &= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-T(x)}{x-\xi}\\ &= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-f'(\xi)\cdot(x-\xi)}{x-\xi}\\ &= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - f'(\xi) = 0\end{aligned}$$

ist.

Satz: Lineare Approximation

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ eine in $\xi \in D$ differenzierbare Funktion, so gibt es eine Funktion $d : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)\cdot(x-\xi) + d(x),$$

wobei

$$d(\xi) = 0, \qquad \lim_{x\to\xi}\frac{d(x)}{x-\xi} = 0$$

gilt. Mit der Tangente

$$T(x) = f(\xi) + f'(\xi)\cdot(x-\xi)$$

erhalten wir eine lineare Approximation $f(x) \approx T(x)$ von f, die in $x = \xi$ exakt ist (Abb. 6.6).

Wir betrachten nun einige einfache Funktionen, um sie auf Differenzierbarkeit hin zu untersuchen und ggf. ihre Ableitung zu bestimmen.

Ableitungen elementarer Funktionen

1. *konstante Funktionen:* Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Die konstante Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = c \end{aligned}$$

erfährt keine Werteänderung. Es ist daher zu erwarten, dass sie differenzierbar ist und für ihre Ableitung $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Wir berechnen den Differenzialquotienten von f in dem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gemäß Definition. In der Tat ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \frac{c - c}{\xi - x} = 0.$$

2. *lineare Funktionen:* Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Die (affin-)lineare Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

besitzt als Graphen eine Gerade der Steigung a, die durch den Punkt $(0, b)$ läuft. Wir berechnen die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \\ &= \lim_{\xi \to x} \frac{a\xi + b - (ax + b)}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \frac{a\xi - ax}{\xi - x} = a. \end{aligned}$$

Die Ableitung einer linearen Funktion f ist also eine konstante Funktion, die erwartungsgemäß den Wert der Steigung a des Graphen von f trägt, welcher dem Vorfaktor vor der unabhängigen Variablen x entspricht.

3. *Kehrwertfunktion:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ berechnen wir gemäß alternativer Definition den Differenzialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x - x - h}{x(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Die Kehrwertfunktion reproduziert sich also bei Ableiten als das Negative ihres Quadrats.

4. *Absolutbetrag:*

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

Für $x \neq 0$ ist $|x|$ differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}|x|}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Für $x = 0$ existiert der Differenzialquotient von $|x|$ nicht, denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \nearrow 0} \frac{|\xi| - |0|}{\xi - 0} &= \lim_{\xi \nearrow 0} \frac{-\xi}{\xi} = -1, \\ \lim_{\xi \searrow 0} \frac{|\xi| - |0|}{\xi - 0} &= \lim_{\xi \searrow 0} \frac{\xi}{\xi} = 1. \end{aligned}$$ ◀

Der Absolutbetrag ist also in $x = 0$ nicht differenzierbar. Dieser Sachverhalt macht sich im Graphen durch seinen charakteristischen Knick in $x = 0$ bemerkbar (s. Abb. 2.62). Eine differenzierbare Funktion hat dagegen keine Knicke im Graphen.

Differenzierbare Funktionen sind stetig

Wir erkennen an obigem letzten Beispiel, dass es stetige Funktionen geben kann, die nicht differenzierbar sind. Allerdings ist die Stetigkeit einer Funktion eine notwendige Bedingung für ihre Differenzierbarkeit, denn es gilt für eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für jedes $\xi \in D$ nach linearer Approximation in ξ:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \xi} f(x) &= \lim_{x \to \xi} (f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + d(x)) \\ &= f(\xi) + \lim_{x \to \xi} \left(f'(\xi) + \tfrac{d(x)}{x - \xi} \right)(x - \xi) = f(\xi). \end{aligned}$$

6.2 Grundregeln für die Differenziation

Die Berechnung der Ableitung einer differenzierbaren Funktion mithilfe des Differenzialquotienten, also per Grenzwertberechnung, ist sehr aufwendig und selten praxistauglich. Aus diesem Grund verwenden wir künftig Ableitungsregeln, mit denen die Bestimmung der Ableitung auf Grundlage einiger elementarer Ableitungen ermöglicht wird.

Ableitungsregeln erlauben das Differenzieren ohne Grenzwertberechnung

Satz: Summenregel, konstanter Faktor und Produktregel

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Mit $f', g' : D \to \mathbb{R}$ werden ihre jeweiligen Ableitungen bezeichnet. Darüber hinaus sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Konstante. Unter diesen Voraussetzungen sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} f+g : D \to \mathbb{R} \text{ definiert durch } & (f+g)(x) := f(x) + g(x), \\ \lambda f : D \to \mathbb{R} \text{ definiert durch } & (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \\ fg : D \to \mathbb{R} \text{ definiert durch } & (fg)(x) := f(x)g(x) \end{aligned}$$

differenzierbar, und es gelten die folgenden Regeln.

1. Summenregel:
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
bzw.
$$\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$
Differenziation und Summation sind also vertauschbar.
2. konstanter Faktor:
$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$
bzw.
$$\frac{\mathrm{d}(\lambda f)}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$
Ein konstanter Faktor „vererbt" sich auf die Ableitung.
3. Produktregel:
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
bzw.
$$\frac{\mathrm{d}(fg)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

Beweis Summenregel und Regel zum konstanten Faktor sind leicht mithilfe der Definition des Differenzialquotienten beweisbar (Übung). Ebenfalls mithilfe der Definition des Differenzialquotienten zeigen wir die Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}fg}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \big(f(x+h)g(x+h) \\ &\qquad - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \big(f(x+h)\,(g(x+h) - g(x)) \\ &\qquad + (f(x+h) - f(x))\, g(x)\big) \\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\ &= f(x) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} g(x). \end{aligned}$$
■

Einige Beispiele sollen die Anwendung der Produktregel verdeutlichen. Wir beachten dabei, dass wir zur endgültigen Bestimmung der Ableitung des Produkts von Funktionen Kenntnis über die Ableitungen der einzelnen Faktoren benötigen.

Die Produktregel anhand einiger Beispiele

1. Es sei $f(x) = x$ der linke und $g(x) = f(x) = x$ der rechte Faktor der Funktion $f(x) \cdot g(x) = x^2$. Die Faktorfunktionen $f(x) = g(x) = x$ sind als Polynome ersten Grades differenzierbar, und es gilt $f'(x) = g'(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$. Nach der Produktregel ist auch die Produktfunktion $f(x) \cdot g(x) = x^2$ differenzierbar, und es gilt für die Ableitung
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x) \cdot g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x. \end{aligned}$$
2. In ähnlicher Weise differenzieren wir nun die Funktion x^3, indem wir für das Produkt $x^3 = x^2 \cdot x$ nach der Produktregel die Ableitung berechnen. Dies bedeutet also: „linken Faktor ableiten *mal* rechten Faktor stehen lassen *plus* linken Faktor stehen lassen *mal* rechten Faktor ableiten":
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 \cdot x) &= \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x} \cdot x + x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \\ &= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2. \end{aligned}$$
3. Mittels vollständiger Induktion kann dies nun verallgemeinert werden zu folgender Ableitungsregel für die Potenz x^n mit $n \in \mathbb{N}_0$:
$$\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = n \cdot x^{n-1} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$
4. Die Produktregel kann auch auf drei Faktoren angewendet werden:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g \cdot h) = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'.$$
Der Ableitungsstrich „wandert" dabei von links nach rechts durch alle Faktoren. Allgemein lautet die Produktregel für ein Produkt bestehend aus n differenzierbaren Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \prod_{j=1}^{n} f_j(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f_j(x)}{\mathrm{d}x} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} f_k(x).$$
(Übung)

Teil II

5. Die Regel zum konstanten Faktor kann auch mithilfe der Produktregel gezeigt werden, da die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lambda f(x)) = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}}_{=0} \cdot f(x) + \lambda \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lambda f'(x)$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ konstant. ◂

Die Summenregel und die Regel zum konstanten Faktor besagen, dass der **Differenzialoperator** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ einen sog. linearen Operator darstellt und daher als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $C(I)$ der auf einem Intervall I differenzierbaren Funktionen aufgefasst werden kann. Mit den bis jetzt diskutierten Ableitungsregeln können wir Funktionen ableiten, deren Terme Polynome mit reellen Koeffizienten sind. Für ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ des Grades $n \geq 1$ der Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

mit $a_k \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ lautet die Ableitung nach der Summenregel, der Regel zum konstanten Faktor und der Regel für die Potenz x^n

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^k = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k x^{k-1}.\end{aligned}$$

Es entsteht also als Ableitung ein Polynom von Grad $n-1$, da wegen $a_n \neq 0$ der Leitkoeffizient $a_n \cdot n$ der Ableitung ebenfalls nicht verschwindet. Viele Funktionen sind aus einzelnen Termbestandteilen zusammengesetzt. Es ist also wichtig, Differenzierbarkeitseigenschaft und Ableitung für eine zusammengesetzte (verkettete) Funktionen zu untersuchen. Eine sehr wichtige Regel ist daher die Kettenregel.

Satz: Kettenregel

Es seien $f : E \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g(D) \subset E$. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion

$$\begin{aligned} f \circ g : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \circ g) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$$

Beweis Es sei $x \in D$. Wir definieren für τ mit $g(x) + \tau \in E$ zunächst die Funktion

$$\varphi(\tau) := \begin{cases} \frac{1}{\tau}\big(f(g(x)+\tau) - f(g(x))\big) & \text{für } \tau \neq 0, \\ f'(g(x)) & \text{für } \tau = 0. \end{cases}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f gilt aufgrund der Definition des Differenzialquotienten

$$\lim_{\tau \to 0} \varphi(\tau) = f'(g(x)) = \varphi(0).$$

Insbesondere ist damit φ stetig in 0. Es ist also für alle τ mit $g(x) + \tau \in E$

$$f(\tau + g(x)) - f(g(x)) = \varphi(\tau) \cdot \tau.$$

Nun sei h so gewählt, dass $x + h \in D$ ist. Die letzte Gleichung lautet dann speziell für $\tau := g(x+h) - g(x)$

$$\begin{aligned} &f(g(x+h) - g(x) + g(x)) - f(g(x)) \\ &\quad = \varphi(g(x+h) - g(x)) \cdot (g(x+h) - g(x)). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Aufgrund der Stetigkeit von g geht $g(x+h) \to g(x)$ für $h \to 0$. Daher folgt nun für den Differenzialquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(g(x+h)) - f(g(x))\big) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(g(x+h) - g(x) + g(x)) - f(g(x))\big) \\ &\overset{(6.1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(\varphi(g(x+h) - g(x))(g(x+h) - g(x))\big) \\ &= \lim_{h\to 0}(\varphi(g(x+h) - g(x)) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x)) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

■

Merkregel

Die Kettenregel kann als eine Art Erweiterungsregel aufgefasst werden:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.$$

Wir erweitern den Differenzialquotienten mit dem sog. „Differenzial“ $\mathrm{d}g(x)$ der „inneren“ Funktion $g(x)$.

Die Ableitung $g'(x)$ der in die Funktion $f(\cdots)$ eingesetzten inneren Funktion $g(x)$ wird auch als **innere Ableitung** bezeichnet. Eine zusammengesetzte Funktion $f(g(x))$ wird also nach x abgeleitet, indem die Ableitung der Funktion f nach der „Variablen“ $g(x)$, die **äußere Ableitung**, mit der inneren Ableitung $g'(x)$ multipliziert wird. Hierbei wird also zunächst die innere Funktion $g(x)$ wie eine Einzelvariable betrachtet:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}g(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Die sichere Anwendung der Kettenregel erfordert etwas Übung. Gelegentlich ist daher der Umweg über die Erweiterungsregel zum Einstieg nützlich. Nach etwas Training sollte das Ableiten nach dem Schema „äußere Ableitung mal innere Ableitung" auch direkt von der Hand gehen.

Die Kettenregel anhand einiger Beispiele

1. Mit $g(x) = x^3, f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x^3}.$$

Nach der Kettenregel gilt für die Ableitung dieser Funktion

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^3} = \frac{\mathrm{d}\frac{1}{x^3}}{\mathrm{d}x^3} \cdot \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x}\\ &= -\frac{1}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 = -\frac{3}{x^4}.\end{aligned}$$

2. Mit $g(x) = x^2 - \frac{1}{x}, f(x) = x^5 + 1$ gilt

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^5 + 1.$$

Nach der Kettenregel gilt für die Ableitung dieser Funktion

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) &= \frac{\mathrm{d}((x^2 - \frac{1}{x})^5 + 1)}{\mathrm{d}(x^2 - \frac{1}{x})} \cdot \frac{\mathrm{d}(x^2 - \frac{1}{x})}{\mathrm{d}x}\\ &= 5\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \left(2x + \tfrac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

3. Wir können die Kettenregel auch mehrmals hintereinander anwenden:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(\frac{1}{x^3} + 1\right)^3 - 1\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}((\frac{1}{x^3} + 1)^3 - 1)}{\mathrm{d}(\frac{1}{x^3} + 1)} \cdot \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{x^3} + 1)}{\mathrm{d}x^3} \cdot \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x}\\ &= 3\left(\frac{1}{x^3} + 1\right)^2 \cdot \frac{-1}{(x^3)^2} \cdot 3x^2.\end{aligned}$$

4. Es sei $f(x)$ eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbare und nullstellenfreie Funktion. Für die durch Kehrwertbildung aus f hervorgehende Funktion $\frac{1}{f(x)}$ folgt nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{f(x)} = \frac{\mathrm{d}\frac{1}{f(x)}}{\mathrm{d}f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot f'(x). \quad ◄$$

Zusammen mit der Produktregel kann auf einfache Weise mithilfe des obigen Beispiels die Quotientenregel gezeigt werden.

Satz: Quotientenregel

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Zudem gelte $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R} \quad \text{definiert durch} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

differenzierbar, und es gilt für die Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\frac{f}{g}}{\mathrm{d}x} &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\\ &= \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir eine Regel, die uns Auskunft über die Differenzierbarkeit und die Ableitung der Umkehrfunktion einer umkehrbaren und differenzierbaren Funktion liefert.

Satz: Umkehrregel

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und streng monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion mit nirgends verschwindender Ableitung $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist auch die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}, \quad (\text{bzw. } f^{-1} : [f(b), f(a)] \to \mathbb{R})$$

differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Beweis Die Umkehrregel folgt aus der Kettenregel, wenn beachtet wird, dass sich Funktion und Umkehrfunktion einander kompensieren, d. h., dass $f(f^{-1}(x)) = x$ gilt. Hierdurch hat man

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(f^{-1}(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(f^{-1}(x))}{\mathrm{d}f^{-1}(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x}.$$

Wir lösen nun diese Gleichung nach der gesuchten Ableitung der Umkehrfunktion auf:

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f(f^{-1}(x))}{\mathrm{d}f^{-1}(x)}\right)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad ■$$

In Kurzform lautet die Umkehrregel für die Umkehrfunktion in der Schreibweise mit dem Differenzialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f^{-1}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f(f^{-1})}{\mathrm{d}f^{-1}}\right)}. \tag{6.2}$$

Wie bei der Kettenregel (Kürzung) können wir mit den Differenzialen $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ quasi bruchrechentechnisch umgehen. Die Umkehrregel eignet sich für die Berechnung der Ableitung der Quadratwurzelfunktion. Für die auf das Intervall $(0,\infty)$ eingeschränkte Funktion $f(x) = x^2$ gelten die Voraussetzungen der Umkehrregel, da auf diesem Intervall f streng monoton wachsend ist und ihre Ableitung $f'(x) = 2x$ für $x \in (0,\infty)$ nirgends verschwindet. Aufgrund der strengen Monotonie ist f umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist die Quadratwurzelfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0^2, \infty^2) = (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Umkehrregel ist die Quadratwurzel für $x > 0$ differenzierbar, und es gilt für ihre Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Etwas kompakter ist es, gemäß der Kurzform (6.2) mit Differenzialen zu argumentieren:

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})^2}{\mathrm{d}\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Beim Ableiten reproduziert sich also die Quadratwurzel als Hälfte ihres Kehrwertes.

Achtung In der Umkehrregel wird eine streng monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit nullstellenfreier Ableitung $f'(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$ vorausgesetzt. Da eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ streng monoton wächst bzw. fällt, könnte man auf die Idee kommen, dass umgekehrt auch für eine streng monoton wachsende bzw. fallende und differenzierbare Funktion $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gelten muss, sodass sich die in der Umkehrregel geforderte Bedingung $f'(x) \neq 0$ erübrigen würde. Das ist aber im Allgemeinen nicht richtig: Die Bedingung $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist hinreichend, aber nicht notwendig für eine strenge Monotonie. So ist beispielsweise die Funktion $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, da für $x_1 < x_2$ stets $x_1^3 < x_2^3$ gilt. Ihre Ableitung $f'(x) = 3x^2$ verschwindet aber in $x = 0$; es gilt also nur die schwache Ungleichung $f'(x) \geq 0$. Diese Funktion käme somit für die Umkehrregel nur dann in Betracht, wenn man sie auf Intervalle einschränkt, die nicht $x = 0$ enthalten. ◀

6.3 Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion ist über die Potenzreihe

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

definiert. Da die n-te Partialsumme der Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \in \mathbb{R}[x]$$

ein Polynom n-ten Grades ist, das bekanntlich eine differenzierbare Funktion darstellt, liegt es nun nicht fern anzunehmen, dass die Exponentialfunktion als Grenzwert der n-ten Partialsumme für $n \to \infty$ ebenfalls differenzierbar ist und der Differenzialoperator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit der Grenzwertbildung vertauschbar ist und somit die Ableitung der Exponentialfunktion liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}k\frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty}k\frac{x^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \exp x. \end{aligned}$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist also wieder die Exponentialfunktion; sie reproduziert sich beim Differenzieren. Problematisch ist aber bei der oben aufgeführten Rechnung das Hineinziehen des Differenzialoperators $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ in die unendliche Summe. Das, was bedingt durch die Linearitätseigenschaft des Differenzialoperators bei der n-ten Partialsumme möglich ist, muss bei einer unendlichen Reihe erst genau untersucht werden. Es handelt sich schließlich um die Vertauschung zweier Grenzwertprozesse: der Differenziation einerseits und Bildung der unendlichen Reihe als Limes der n-ten Partialsumme für $n \to \infty$ andererseits.

Die Exponentialreihe darf gliedweise differenziert werden und reproduziert sich beim Ableiten

Maßgeblich für die Vertauschbarkeit dieser beiden Grenzwertprozesse ist dabei eine Konvergenzeigenschaft, die wir bislang nicht betrachtet hatten. Es handelt sich hierbei um die gleichmäßige Konvergenz der Folge der abgeleiteten Partialsummen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^k}{k!}$$

auf beliebigen abgeschlossenen Intervallen. Eine Folge $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ von Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein in der Regel nur von ε und nicht von x abhängiges $n_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in [a,b] \text{ und alle } n \geq n_0.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die schwächere punktweise Konvergenz, die lediglich fordert, dass individuell in jedem $x \in [a, b]$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein in der Regel von ε und x abhängiges $n_0(x) \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0(x).$$

Das n_0 hat also im Fall der gleichmäßigen Konvergenz eine für alle $x \in [a, b]$ globale Bedeutung. Da in der Angewandten Mathematik sehr viel mit Funktionenfolgen und insbesondere mit Potenzreihen gearbeitet wird, ist die gleichmäßige Konvergenz eine sehr zentrale Eigenschaft. Sie garantiert beispielsweise die Stetigkeit der Grenzfunktion, sofern die Einzelfunktionen f_n stetig sind. Ein Beispiel für eine nicht gleichmäßig, sondern nur punktweise konvergente Folge von Funktionen ist die durch die Funktionen

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definierte Funktionenfolge

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, x, x^2, x^3, \ldots).$$

Wir erkennen unmittelbar, dass diese Funktionenfolge in jedem $x \in [0, 1]$ konvergent ist. Es gilt nämlich für $x \in [0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 1, \\ 0 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Diese Funktionenfolge ist jedoch nicht gleichmäßig konvergent. Wenn wir annehmen, dass die Funktionenfolge gleichmäßig konvergieren würde, dann gäbe es für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x \in [0, 1]$

$$\left| f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right| < \frac{1}{2}$$

für $n \geq n_0$ gälte. Es sei nun $y = \sqrt[n_0]{\frac{1}{2}}$. Es gilt $0 < y < 1$. Auch für y müsste dann für $n \geq n_0$

$$|f_n(y) - 0| = y^n < \frac{1}{2}.$$

gelten. Diese Ungleichung müsste aber auch für $n = n_0$ gelten, was aber zu einem Widerspruch führt, da

$$y^{n_0} = \frac{1}{2}$$

gilt. Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ ist also nicht gleichmäßig konvergent. Wir hätten dies auch anders zeigen können: Da für gleichmäßig konvergente Folgen stetiger Funktionen die Grenzfunktion ebenfalls stetig ist, müsste unter der Annahme der gleichmäßigen Konvergenz für $(f_n)_n$ auch ihre Grenzfunktion stetig sein. Es gilt aber

$$f_n(x) \overset{n\to\infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 1, \\ 0 & \text{für} \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Die Grenzfunktion f ist keine stetige Funktion. Also kann die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ nicht gleichmäßig konvergent sein.

Auch ohne Kenntnisse über die Eigenschaften der gleichmäßigen Konvergenz können wir zeigen, dass die Exponentialfunktion differenzierbar ist und sich beim Ableiten exakt reproduziert. Hierzu berechnen wir zunächst die Ableitung der Exponentialfunktion im Punkt $x = 0$ gemäß Definition des Differenzialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\exp}{\mathrm{d}x}(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - \exp 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} - 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \\ &= \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!} = \lim_{h\to 0} \left(1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1}}{k!}}_{\to 0} \right) = 1. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun den allgemeinen Differenzialquotienten für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\exp}{\mathrm{d}x}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\exp x)(\exp h) - \exp x}{h} = \lim_{h\to 0} \exp x \frac{\exp h - 1}{h} \\ &= \exp x \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x \underbrace{\frac{\mathrm{d}\exp}{\mathrm{d}x}(0)}_{=1 \quad \text{(s. oben)}} = \exp x. \end{aligned}$$

Diese markante Eigenschaft der Exponentialfunktion, nämlich ihrer eigenen Ableitung zu entsprechen, hat eine zentrale und grundlegende Bedeutung in allen Naturwissenschaften. Viele Prozesse, egal ob es sich um physikalische Prozesse wie Bewegungen, biologische Prozesse wie Wachstum oder Zerfall oder um technische Prozesse handelt, lassen sich mithilfe sog. Differenzialgleichungen mathematisch formulieren. Bei dieser Problemstellung werden insbesondere Funktionen gesucht, die Reproduktionseigenschaften beim Ableiten haben. Die Exponentialfunktion spielt daher für Lösungsansätze derartiger Probleme eine herausragende Rolle. Wachstums- und Zerfallsprozesse sind dabei mithilfe der reellen Exponentialfunktion darstellbar, während die komplexe Exponentialfunktion, bedingt durch den über die Euler-Formel bekannten Zusammenhang mit der Sinus- und Kosinusfunktion, für Prozesse mit harmonischen Schwingungen in Verbindung gebracht werden kann.

Satz: Ableitung der Exponentialfunktion

Die (reelle) Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp x = \exp x.$$

Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion.

Kommentar In der Funktionentheorie (komplexe Analysis), einer mathematischen Teildisziplin der Analysis, ist die Betrachtung von komplexwertigen Funktionen, die von komplexen Variablen abhängen, unter Differenzierbarkeitsaspekten ein zentraler Gegenstand. Insbesondere werden hier reelle Funktionen ins Komplexe „fortgesetzt". Hierbei steht die Klasse der holomorphen Funktionen als gewissermaßen komplexes Pendant zu reell-differenzierbaren Funktionen im Fokus. In diesem Zusammenhang kann die Reproduktionseigenschaft auch im Sinne der holomorphen Ableitung der komplexen Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$$
$$z \mapsto \exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

nachgewiesen werden. Es gilt dann analog zur reellen Situation die Reproduktionsregel

$$\frac{\mathrm{d} \exp z}{\mathrm{d}z} = \exp z.$$ ◀

Da die reelle Exponentialfunktion bedingt durch ihr streng monotones Wachstum umkehrbar ist und die Ableitung $\exp x \neq 0$ nirgends verschwindet, ist der natürliche Logarithmus nach der Umkehrregel ebenfalls differenzierbar.

Satz: Ableitung der Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \ln x$$

ist für alle $x > 0$ differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}. \qquad (6.3)$$

Dieses Ergebnis ist mit der Umkehrregel sehr einfach zu berechnen. Es gilt nach dieser Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1}

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Hier ist nun $f^{-1} = \ln$ und $f = \exp$, daher folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

6.4 Ableitung der trigonometrischen Grundfunktionen und ihrer lokalen Umkehrungen

Bevor wir die trigonometrischen Grundfunktionen ableiten, werfen wir einen Blick auf die in jeder guten Formelsammlung aufgeführten Additionstheoreme des Sinus und des Kosinus.

Satz: Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

Speziell folgt hieraus:

1. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

Die Additionstheoreme lassen sich über die Darstellung des Sinus und des Kosinus mithilfe der komplexen Exponentialfunktion

$$\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right), \quad \cos t = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion nachweisen. Die entsprechenden Schritte seien als Übung empfohlen.

Rein formal könnten wir nun versuchen, die Sinus- und die Kosinusfunktion mithilfe der obigen Zerlegung abzuleiten. Es würde dann folgen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \cos t.$$

Für die Kosinusableitung folgt nach ähnlicher Rechnung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos t = \frac{1}{2} \left(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = -\frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = -\sin t.$$

Diese Herleitung erscheint sehr attraktiv. Problematisch ist bei dieser Argumentation allerdings, dass wir bislang nicht gezeigt haben, dass sich die Kettenregel und die Regel für den konstanten Faktor auch auf imaginäre Zahlen übertragen lässt.

Daher begründen wir die Differenzierbarkeit der Sinus- und des Kosinusfunktion auf andere Weise. Ähnlich wie bei der Exponentialfunktion berechnen wir zunächst die Ableitung des Kosinus und des Sinus im Punkt $x = 0$ und verwenden dazu die Reihendarstellungen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Teil II

beider Funktionen:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\cos}{\mathrm{d}x}(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{h^{2k}}{(2k)!} - 1\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{h^{2k}}{(2k)!}\\ &= \lim_{h\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{h^{2k-1}}{(2k)!} = 0,\\ \frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h - 0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{h^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{h^{2k}}{(2k+1)!}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{h^{2k}}{(2k+1)!}}_{\to 0}\right) = 1.\end{aligned}$$

Wir berechnen nun für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ den Differenzialquotienten der Sinusfunktion und nutzen dabei ein Additionstheorem für den Sinus:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h\cos x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\underbrace{\frac{\cos h - \cos 0}{h}}_{\to\cos' 0 = 0} + \underbrace{\frac{\sin h - \sin 0}{h}}_{\to\sin' 0 = 1}\cos x\right)\\ &= \sin x\cdot 0 + 1\cdot\cos x = \cos x.\end{aligned}$$

Der Sinus ist also überall differenzierbar. Seine Ableitung ist der Kosinus.

Wie sieht die Situation beim Kosinus aus? Wir können nun etwas einfacher vorgehen und leiten $\cos^2 x$ nach der Kettenregel ab:

$$\frac{\mathrm{d}\cos^2 x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\cos x)^2}{\mathrm{d}\cos x}\cdot\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = 2\cos x\cdot\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}.$$

Wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ können wir auch $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ nach der Kettenregel ableiten:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\cos^2 x}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(1 - \sin^2 x)}{\mathrm{d}x}\\ &= \frac{\mathrm{d}(1 - (\sin x)^2)}{\mathrm{d}\sin x}\cdot\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = -2\sin x\cdot\cos x.\end{aligned}$$

Beides zusammen ergibt

$$2\cos x\cdot\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -2\sin x\cdot\cos x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, und daher folgt

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$$

Genau genommen müssten wir die Ableitung des Kosinus in seinen Nullstellen noch untersuchen. Wir verzichten darauf.

Da uns jetzt die Ableitung des Sinus und des Kosinus bekannt sind, können wir auch den Tangens auf seiner Definitionsmenge ableiten. Dazu verwenden wir die Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}\frac{\sin x}{\cos x}}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.\end{aligned}$$

Der Tangens reproduziert sich also beim Ableiten als sein Quadrat plus 1.

Satz: Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sin, cos und tan sind auf ihren Definitionsmengen differenzierbar, und es gilt:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

Eine differenzierbare Funktion braucht keine differenzierbare Ableitung zu haben, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) = |x|\cdot x.\end{aligned}$$

Für diese Funktion gilt $f(x) = x^2$ für $x \geq 0$ sowie $f(x) = -x^2$ für negative x. Für $x > 0$ ist f differenzierbar, und für die Ableitung gilt $f'(x) = 2x = 2|x|$. Entsprechend ist f auch für $x < 0$ differenzierbar mit $f'(x) = -2x = 2|x|$.

Wie steht es mit der Differenzierbarkeit von f in $x = 0$? Es gilt für den Differenzialquotienten bei $x = 0$

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi\to 0}\frac{|\xi|\xi}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}|\xi| = 0.$$

Die Funktion ist also ebenfalls in $x = 0$ differenzierbar mit verschwindender Ableitung $f'(0) = 0$. Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2|x|.$$

Diese Funktion ist jedoch nicht differenzierbar in $x = 0$, denn der Differenzialquotient von f' existiert nicht in $x = 0$, da linksseitiger Grenzwert,

$$\lim_{\xi \searrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \searrow 0} \frac{2|\xi|}{\xi} \overset{\xi > 0}{=} 2,$$

und rechtsseitiger Grenzwert,

$$\lim_{\xi \nearrow 0} \frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0} = \lim_{\xi \nearrow 0} \frac{2|\xi|}{\xi} \overset{\xi < 0}{=} -2,$$

verschieden sind. Die Betragsfunktion $|x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar. Es gibt sogar Funktionen, die an keiner einzigen Stelle ihres Definitionsbereichs differenzierbar sind. Ein Beispiel hierfür ist die Dirichlet-Funktion:

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{Q}} &: \mathbb{R} \to \{0, 1\} \\ x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}(x) &:= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Dirichlet-Funktion ist sogar an keiner Stelle stetig.

Ableitungen differenzierbarer Funktionen können also – müssen aber nicht – ein weiteres Mal differenzierbar sein. Bildet man im Fall der Differenzierbarkeit die Ableitung der Ableitung, so spricht man auch von der zweiten Ableitung der Ausgangsfunktion.

Definition: Höhergradige Ableitungen

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren Ableitungsfunktion $f' : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ ebenfalls differenzierbar ist, so heißt

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x) =: f''(x)$$

die **zweite Ableitung** von f in x. Die Ausgangsfunktion f wird in dieser Situation als zweimal differenzierbar in x bezeichnet. Allgemein wird die **k-te Ableitung** von f in x definiert als

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}} f(x) := f^{(k)}(x)$$

für $k \in \mathbb{N}$, wobei formal mit der „nullten Ableitung" die Ausgangsfunktion $f^0 = f$ bezeichnet wird. Hierbei müssen die Funktionen $f, f', f'', \ldots, f^{(k-1)}$ allesamt differenzierbar in x sein. Die Ausgangsfunktion f heißt dann „k-mal differenzierbar" in x.

Die Ableitung einer auf einem Intervall differenzierbaren Funktion muss dort nicht unbedingt ebenfalls differenzierbar sein, wie wir bereits anhand eines Beispiels festgestellt haben. Die Ableitung einer auf einem Intervall differenzierbaren Funktion

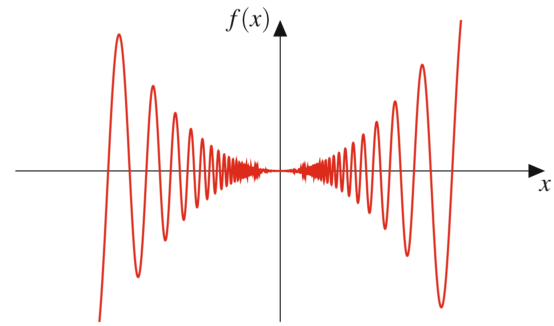

Abb. 6.7 Die differenzierbare Funktion $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ mit nicht stetiger Ableitung in $x = 0$

muss dort nicht einmal stetig sein. Die Konstruktion eines entsprechenden Beispiels ist aber etwas komplizierter. Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(Abb. 6.7) ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Wir berechnen ihre Ableitung in $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h}(f(0 + h) - f(0)) &= \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h}((0 + h)^2 \sin \tfrac{1}{0+h} - 0) \\ &= \lim_{h \to 0} h \underbrace{\sin \tfrac{1}{h}}_{\in[-1,1]} = 0. \end{aligned}$$

Ihre Ableitung ist demnach

$$f'(x) := \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

und ist nicht stetig in $x = 0$, da der Grenzwert von f' für $x \to 0$ nicht einmal für $x \neq 0$ existiert.

Eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung wird als **stetig differenzierbar** bezeichnet. Am Beispiel der Sinus- und der Kosinusfunktion erkennen wir eine Reproduktionseigenschaft hinsichtlich des Differenzierens. Die Ableitung des Sinus ist der Kosinus, während der Kosinus abgeleitet den negativen Sinus ergibt. Diese Funktion ist ebenfalls differenzierbar und ergibt als Ableitung den negativen Kosinus, der wiederum abgeleitet wieder die Ausgangsfunktion, also den Sinus, liefert. Es ergibt sich daher ein Viererzyklus

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sin x = \frac{\mathrm{d}^{k+4}}{\mathrm{d}x^{k+4}} \sin x \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Bedingt durch ihre Periodizität sind die trigometrischen Funktionen sin, cos und tan nicht umkehrbar. Wenn wir diese Funktionen jedoch auf Intervalle einschränken, auf denen diese Funktionen streng monoton sind, so können wir sie umkehren. Hierzu betrachten wir die folgenden Einschränkungen:

$$\begin{aligned} \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} &: \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \\ \cos|_{[0,\,\pi]} &: \quad [0,\ \pi] \to [-1, 1], \\ \tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} &: \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

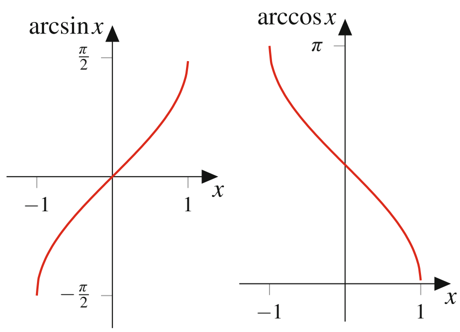

Abb. 6.8 Graphen der Arkusfunktionen arcsin und arccos

Sinus und Tangens sind auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bzw. auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend, während der Kosinus auf $[0, \pi]$ streng monoton fällt. Daher existieren auf diesen Intervallen jeweils die Umkehrfunktionen. Sie werden als **Arkusfunktionen**, genauer Arkussinus, Arkuskosinus und Arkustangens, bezeichnet:

$$\begin{aligned} \arcsin: \quad & [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \arccos: \quad & [-1,1] \to [0, \ \pi], \\ \arctan: \quad & \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Da sich das Monotonieverhalten auf die Umkehrfunktion überträgt, sind arcsin und arctan streng monoton wachsende Funktionen, während arccos eine streng monoton fallende Funktion darstellt. Abb. 6.8 zeigt die Graphen des Arkussinus und des Arkuskosinus, Abb. 6.9 den Graphen des Arkustangens.

Wir berechnen nun mithilfe der Umkehrregel die Ableitung des Arkussinus. Da $\sin' x = \cos x$ gilt und der cos im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nullstellenfrei ist, gilt für $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Hierbei machen wir uns den Satz des Pythagoras am Einheitskreis zunutze, d. h. $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ oder, anders ausgedrückt, $\cos \varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2 \varphi}$. Da für $\varphi = \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ der Kosinus positiv ist, folgt die Darstellung des Kosinus mit der positiven Wurzel. Es gilt also hier

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}.$$

In ähnlicher Weise können wir verfahren, um die Ableitungen des arccos und die des arctan zu berechnen.

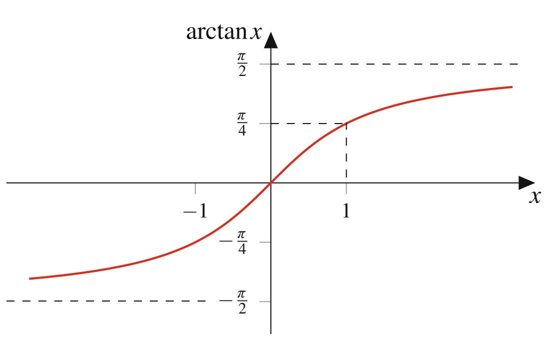

Abb. 6.9 Graph der Arkusfunktion arctan

Satz: Ableitungen der Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen $\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos: [-1,1] \to [0, \pi]$ und $\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sind im Inneren ihrer Definitionsbereiche differenzierbar, und es gilt:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1, 1)$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1, 1)$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$

Der Arkustangens (Abb. 6.9) ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, ungerade Funktion. Es gilt also

$$\arctan(-x) = \arctan(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Zudem ist der Arkustangens beschränkt. Sein Infimum beträgt $-\frac{\pi}{2}$, während sein Supremum $\frac{\pi}{2}$ lautet. Der Arkustangens liefert also Winkelwerte, die zwischen $-90°$ und $90°$ liegen, wobei diese beiden Grenzwinkel nicht im Wertebereich liegen.

Tab. 6.2 Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\mathrm{e}^x = \exp x$	$\mathrm{e}^x = \exp x$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$a^x = \exp(x \ln a)$	$a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \log_a \mathrm{e}$	$a > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \notin (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$	$x \notin \pi\mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$	

Achtung Auf den Tastenbeschriftungen vieler Taschenrechner wird der Arkustangens mit der Bezeichnung $\tan^{-1}$ abgekürzt. Dies darf nicht mit dem Kehrwert des Tangens verwechselt werden. ◀

Der Kehrwert des Tangens wird als **Kotangens** bezeichnet und ist bis auf die Nullstellen des Sinus überall sonst definiert und dort differenzierbar:

$$\cot x := \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Für seine Ableitung gilt nach der Quotientenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cot x = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Die Ableitungen wichtiger elementarer Funktionen in Tab. 6.2 sind so nützlich, dass es sich lohnt, sie auswendig zu lernen.

6.5 Kurvenuntersuchung und Extremwerte

Wir kennen bereits den Zusammenhang zwischen Monotonieverhalten und Ableitung einer differenzierbaren Funktion:

Satz

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die (mindestens) in (a,b) differenzierbar ist. Dann gilt:

1. Falls die Ableitung f' in fast allen $x \in (a,b)$ positiv ist, d. h., falls $f'(x) > 0$ für $x \in (a,b)$ mit Ausnahme höchstens endlich vieler x gilt, so ist f streng monoton wachsend (in $[a,b]$).
2. Falls $f'(x) \geq 0$ für $x \in (a,b)$ gilt, so ist f monoton wachsend (in $[a,b]$).

Entsprechendes gilt für streng fallende bzw. fallende Monotonie (Ersetzen von $>$ durch $<$ bzw. $\geq$ durch $\leq$).

Sollte die Ableitung einer differenzierbaren Funktion überall positiv bzw. negativ sein, so ist die Funktion streng monoton wachsend bzw. fallend. Umgekehrt braucht aber für die Ableitung f' einer streng monoton wachsenden bzw. fallenden Funktion nicht $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ zu gelten. Notwendig für strenge Monotonie ist lediglich die schwache Ungleichung $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$. Ein Beispiel hierfür stellt die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f(x) = x^3$ dar. Diese Funktion ist streng monoton wachsend. Für die Ableitung gilt jedoch nur die schwache Ungleichung $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Die starke Ungleichung gilt hier mit Ausnahme genau eines Punktes: $f'(x) = 3x^2 > 0$ für alle $x \neq 0$ und damit „für fast alle" $x \in \mathbb{R}$. An Stellen, in denen eine Funktion ihre Monotonie wechselt, treten lokale Extrema auf. Wir wollen nun den Begriff der lokalen Extremalstelle präzisieren.

Definition: Lokales Extremum

Eine (mindestens) auf einem offenen Intervall (a,b) definierte Funktion f hat in einem Punkt $\hat{x} \in (a,b)$ ein **lokales Minimum** (bzw. **lokales Maximum**) mit dem Wert $f(\hat{x})$, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\hat{x}) \\ (\text{bzw.}\quad f(x) &\leq f(\hat{x})) \end{aligned} \quad \text{für } |x - \hat{x}| < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Hat f in einem Punkt $\hat{x}$ ein lokales Minimum oder Maximum, so wird dies auch übergreifend als **lokales Extremum** bezeichnet. Die Stelle $\hat{x}$ wird dabei als lokale Minimalstelle bzw. Maximalstelle oder allgemein als **lokale Extremalstelle** bezeichnet.

In einer lokalen Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion vollzieht ihre Ableitung einen Nulldurchgang

Mithilfe der Ableitung einer differenzierbaren Funktion steht uns eine Möglichkeit zur Verfügung, die Funktion auf lokale Extremalstellen hin zu untersuchen. Wenn f ein isoliertes Extremum in einem Punkt $\hat{x}$ besitzt, d. h., die Ungleichung (6.4) wird für $x \neq \hat{x}$ zur strengen Ungleichung, so liegt in $\hat{x}$ ein Monotoniewechsel vor. Dies bedeutet, dass die Ableitung in $\hat{x}$ einen Nulldurchgang erfährt. Handelt es sich dabei um einen Nulldurchgang von $-$ nach $+$, so besitzt die Funktion an der Stelle $\hat{x}$ ein lokales Minimum, während ein Nulldurchgang von $+$ nach $-$ für ein lokales Maximum steht. Notwendig für eine lokale Extremalstelle $\hat{x}$ einer differenzierbaren Funktion f ist in jedem Fall eine Nullstelle in $\hat{x}$ für die Ableitung, d. h. $f'(\hat{x}) = 0$. Das folgende Kriterium qualifiziert die Extremalstellen durch den Vorzeichenwechsel in der Ableitung.

Satz: Vorzeichenwechselkriterium

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und (mindestens) in (a,b) differenzierbare Funktion. Gilt für ein $\hat{x} \in (a,b)$

$$f'(\hat{x}) = 0 \quad \text{sowie} \quad f'(\hat{x} - \varepsilon) < 0, \quad f'(\hat{x} + \varepsilon) > 0 \tag{6.5}$$

für alle hinreichend kleine $\varepsilon > 0$, so besitzt f in $\hat{x}$ ein lokales Minimum. Entsprechend besitzt f in $\hat{x}$ ein lokales Maximum, wenn in (6.5) $+$ und $-$ miteinander vertauscht werden.

Die Formulierung „für alle hinreichend kleine $\varepsilon > 0 \ldots$ " bedeutet nichts anderes, als dass die Ableitung $f'(x)$ für alle x „kurz vor" $\hat{x}$ negativ und „kurz nach" $\hat{x}$ positiv ist.

Wenn für *alle* hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gilt $f'(\hat{x} \mp \varepsilon) < 0$ und $f'(\hat{x} \pm \varepsilon) > 0$, so folgt bereits, dass f' eine Nullstelle in $\hat{x}$ haben muss. Notwendig für ein lokales Extremum in $\hat{x}$ ist also, dass $\hat{x}$ eine Nullstelle der Ableitung f' ist.

Satz: Notwendige Extremalbedingung erster Ordnung

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und (mindestens) in (a, b) differenzierbare Funktion, die in $\hat{x} \in (a, b)$ ein lokales Extremum besitzt. Dann gilt $f'(\hat{x}) = 0$.

Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend für einen Monotoniewechsel und damit für eine Extremalstelle in $\hat{x}$. So hat etwa die kubische Normalparabel $f(x) = x^3$ eine Nullstelle ihrer Ableitung $f'(x) = 3x^2$ in $\hat{x} = 0$. Sie besitzt aber kein lokales Extremum. In vielen Fällen kann zusätzlich mithilfe der zweiten Ableitung in $\hat{x}$ ein mögliches Extremum näher qualifiziert werden.

Satz: Hinreichende Extremalbedingung zweiter Ordnung

Gibt es für eine zweimal auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ein $\hat{x} \in I$ mit $f'(\hat{x}) = 0$ und $f''(\hat{x}) > 0$ (bzw. $f''(\hat{x}) < 0$), so besitzt f in $\hat{x}$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum).

Dieses Kriterium kann durch lineare Approximation von $f'(x)$ gezeigt werden, indem ein Nulldurchgang (Vorzeichenwechsel) von f' in $\hat{x}$ nachgewiesen wird (vgl. Aufgabe 6.2). Diese Bedingung ist allerdings nur hinreichend, jedoch nicht notwendig für ein lokales Extremum, wie das Beispiel $f(x) = x^4$ zeigt. Hier liegt in zwar in $\hat{x} = 0$ ein Minimum vor, und es ist $f'(\hat{x}) = 0$, allerdings verschwindet die zweite Ableitung $f''(x) = 12x^2$ in $\hat{x} = 0$.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Für die Ableitung $f'(x) = 2x + 2$ gilt $f'(x) < 0$ für $x < -1$ und $f'(x) > 0$ für $x > -1$. In $\hat{x} = -1$ besitzt f' eine Nullstelle. Die Ableitung erfährt also in $\hat{x} = -1$ einen Nulldurchgang von $-$ nach $+$ und f somit einen Monotoniewechsel von streng fallend nach streng wachsend. Daher besitzt f in $\hat{x} = -1$ ein lokales Minimum, das sogar global ist, denn es gilt

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x + 1)^2 - 1.$$

Bei f handelt es sich also um die um den Wert 1 nach links und um den Wert 1 nach unten verschobene Normalparabel, deren Scheitelpunkt bei $\hat{x} = -1$ liegt. Damit gilt $f(\hat{x}) \le f(x)$ sogar für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir erkennen zudem, dass sowohl die notwendige Extremalbedingung $f'(\hat{x}) = 0$ als auch die hinreichende Extremalbedingung $f''(\hat{x}) = 2 > 0$ erfüllt ist, woraus nach dem letzten Satz folgt, dass f in $\hat{x}$ ein lokales Minimum besitzt. ◀

6.6 Grenzwertbestimmung

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ergibt sich aus einer Grenzwertbetrachtung, indem der Differenzenquotient zum Differenzialquotienten wird. Da wir mithilfe der Ableitungsregeln keine Grenzwertbetrachtung zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion benötigen, können wir nun umgekehrt mithilfe der Differenzialrechnung auch Grenzwerte bestimmen.

Satz: Regeln von de l'Hospital

Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $a, b \in \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Sind für eine Zahl $x_0 \in (a, b)$ zwei Funktionen f und g auf dem „punktierten" Intervall $(a, b) \setminus \{x_0\}$ definiert und dort differenzierbar, sodass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$, so gelten die folgenden Grenzwertregeln:

1. Wenn
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x),$$
so ist
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
2. Wenn
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty,$$
so gilt ebenfalls
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

wobei wir voraussetzen, dass der letzte Grenzwert existiert bzw. $\pm\infty$ ist.

Sind f und g zwei auf (a, b) definierte und dort differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gelten die folgenden Regeln für einseitige Grenzwerte:

1. Wenn
$$\lim_{x \searrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow a} g(x) \quad \text{bzw.}$$
$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} g(x),$$
so ist
$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
2. Wenn
$$\lim_{x \searrow a} g(x) = \pm\infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty,$$
so ist
$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
sofern der Grenzwert $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bzw. $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert bzw. $\pm\infty$ ist.

Teil II

Teil II

Achtung Bei der Anwendung der Regeln von de l'Hospital leiten wir Zähler und Nenner getrennt ab. Hier wird *nicht* der komplette Bruch per Quotientenregel abgeleitet. ◀

Beispiele zu den Regeln von de l'Hospital

1. Zur Bestimmung des Grenzwertes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\ln(x^2+1)},$$

stellen wir zunächst fest, dass die Zählerfunktion $f(x) = \arctan x^2$ und die Nennerfunktion $g(x) = \ln(x^2+1)$ überall definiert sind, insbesondere in dem Intervall $(-1,1)$. Dieses Intervall enthält $x_0 = 0$. Beide Funktionen sind trivialerweise auch auf dem punktierten Intervall $(-1,1)\setminus\{0\}$ definiert und dort differenzierbar. Zudem laufen Zähler und Nenner jeweils gegen 0 für $x \to 0$. Für die Ableitung der Nennerfunktion gilt

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \neq 0 \quad \text{für alle } x \in (-1,1)\setminus\{0\}.$$

Wir können daher die erste Regel von de l'Hospital zur Berechnung des Grenzwertes anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2 \;\to 0}{\ln(x^2+1) \to 0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x^2}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^4}}{\frac{2x}{x^2+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{1+x^4} = 1.\end{aligned}$$

2. Wir berechnen den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{(1-x)^3}.$$

Zähler- und Nennerpolynom gehen beide für $x \to 1$ gegen 0 und sind beispielsweise auf dem Intervall $(0,2)$ definiert und dort differenzierbar und daher erst recht auf dem punktierten Intervall $(0,2)\setminus\{1\}$. Für die Ableitung des Nennerpolynoms gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^3 = -3(1-x)^2 \neq 0$ für alle $x \in (0,2)\setminus\{1\}$. Wir wenden daher die erste Regel von de l'Hospital an und erhalten für den gesuchten Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1 \;\to 0}{(1-x)^3 \to 0} &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-1)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^3}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2 \quad \to 1}{-3(1-x)^2 \to 0^-} = -\infty.\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass im letzten Quotienten der Nenner $-3(1-x)^2$ „von unten" gegen 0 geht.

3. Für die Funktionen $f(x) = 1-2x+2x^3-x^4$ und $g(x) = x-3x^2+3x^3-x^4$ gilt jeweils $f(1) = 0 = g(1)$. Wir betrachten den Grenzwert von $f(x)/g(x)$ für $x \to 1$ und wenden hierzu die erste Regel von de l'Hospital an:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)\to 0}{g(x)\to 0} &= \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-2+6x^2-4x^3 \quad \to 0}{1-6x+9x^2-4x^3 \to 0}.\end{aligned}$$

Wir wenden die erste Regel von de l'Hospital ein weiteres Mal an:

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2+6x^2-4x^3}{1-6x+9x^2-4x^3} = \lim_{x\to 1}\frac{12x-12x^2 \quad \to 0}{-6+18x-12x^2 \to 0}.$$

Erst eine dritte Anwendung ergibt ein eindeutiges Ergebnis:

$$\lim_{x\to 1}\frac{12x-12x^2}{-6+18x-12x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{12-24x}{18-24x} = \frac{-12}{-6} = 2.$$

4. Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definiert und dort stetig differenzierbar. Wir berechnen nun den rechtsseitigen Grenzwert von f für $x \searrow 0$:

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Auf die gleiche Weise können wir auch den linksseitigen Grenzwert berechnen:

$$\lim_{x\nearrow 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x} = \lim_{x\nearrow 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Wir können daher die Funktion f stetig in $x = 0$ fortsetzen durch genau diesen Grenzwert. Die Funktion ist durch $f(0) := 1$ sogar stetig differenzierbar in $x = 0$ fortsetzbar mit $f'(0) = 0$.

5. Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)^3}$$

ist zunächst nicht unmittelbar ablesbar, da sowohl Zähler $\ln x$ als auch Nenner $(x-1)^2$ für x gegen 1 verschwinden. Beide Funktionen sind differenzierbar auf $(0,\infty)$, die Ableitung des Nenners $3(x-1)^2$ ist für $x \neq 1$ nullstellenfrei. Es gilt nun für den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)^3} &= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-1)^3}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{3(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{3x(x-1)^2} = \infty.\end{aligned}$$

6. Die Funktion $x^2\ln(x^2)$ ist für $x \neq 0$ stetig differenzierbar. Bei Betrachtung des Grenzwertes

$$\lim_{x\to 0}x^2\ln(x^2)$$

fällt auf, dass der erste Faktor x^2 gegen 0 geht, während der zweite Faktor $\ln(x^2)$ nach $-\infty$ geht. Die Situation $0 \cdot (-\infty)$ ist zunächst nicht unmittelbar definiert und bedarf einer individuellen Untersuchung. Wir wandeln das Produkt in einen Quotienten, um die Grenzwertregeln von de l'Hospital anschließend anwenden zu können:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^2 \ln(x^2) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2) \to -\infty}{\frac{1}{x^2} \quad \to \infty} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^4 \cdot 2x}{x^2 \cdot 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} -x^2 = 0.\end{aligned}$$

7. Die Teilfunktionen müssen nicht im Grenzpunkt x_0 differenzierbar sein. Sie brauchen dort nicht einmal definiert zu sein wie beispielsweise die Funktion $f(x) = \ln|x|$. Diese Funktion ist für $x \neq 0$ definiert, nicht jedoch in $x = 0$. Die Betragsfunktion $|x|$ ist zwar in $x = 0$ definiert, dort jedoch nicht differenzierbar. Für $x \neq 0$ lautet die Ableitung der Betragsfunktion $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$. Diese Funktion trägt den Wert 1 für $x > 0$ und -1 für $x < 0$. Hieraus ergibt sich für $x \neq 0$ die Ableitung von $f(x) = \ln|x|$ als $f'(x) = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$. Mit diesen Informationen berechnen wir nun den Grenzwert
$$\lim_{x\to 0} |x| \ln|x|.$$
Hier liegt im Prinzip die Situation $0 \cdot \infty$ vor, bis auf das Vorzeichen. Wir wandeln den Ausdruck wieder in einen Quotienten um:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} |x| \ln|x| &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x| \to -\infty}{\frac{1}{|x|} \quad \to \infty} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x|}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{|x|}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{|x|^2}\cdot\frac{|x|}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} -|x| = 0.\end{aligned}$$
Wenn wir statt $|x|$ den anderen Faktor $\ln|x|$ kehrwertmäßig in den Nenner gebracht hätten, so hätte uns diese Maßnahme für die Berechnung des Grenzwertes nicht weitergeholfen:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} |x| \ln|x| &= \lim_{x\to 0} \frac{|x| \quad \to 0}{(\ln|x|)^{-1} \to 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x|}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln|x|)^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{|x|}{x}}{-(\ln|x|)^{-2}\cdot\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} -|x|\,(\ln|x|)^2.\end{aligned}$$
Es bleibt bei der Situation $0 \cdot \infty$.

8. Schließlich betrachten wir eine weitere Grenzwertsituation:
$$\lim_{x\to\infty} (\ln x - \sqrt{x}).$$
Sowohl $\ln x$ als auch $\sqrt{x}$ sind für $x \to \infty$ bestimmt divergent gegen ∞. Es liegt hier die Situation $\infty - \infty$ vor. Wir wandeln die Differenz zunächst in ein Produkt um:
$$\lim_{x\to\infty} (\ln x - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1\right).$$
Hierzu benötigen wir den Grenzwert von $(\ln x)/\sqrt{x}$ für $x \to \infty$:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x \to \infty}{\sqrt{x} \to \infty} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.\end{aligned}$$
Also folgt
$$\lim_{x\to\infty} (\ln x - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1\right) = -\infty. \blacktriangleleft$$

Aufgaben

6.1 Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die (erste) Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ bzw. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$:

a) $f(x) = x(x+1)$
b) $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$
c) $f(t) = 2(t-1)^5 + 3t^4 - \frac{1}{t-2}$
d) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
e) $f(t) = (2t^2 - t + 1)(t^2 + 1)$
f) $f(x) = \frac{1}{x^4 - x^2} + \frac{1}{x(x-x^3)}$
g) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

6.2 Zeigen Sie die hinreichende Extremalbedingung zweiter Ordnung: Gibt es für eine zweimal auf einem Intervall I differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ein $\hat{x} \in I$ mit $f'(\hat{x}) = 0$ und $f''(\hat{x}) > 0$ (bzw. $f''(\hat{x}) < 0$), so besitzt f in $\hat{x}$ ein lokales Minimum (bzw. Maximum). Hinweis: Approximieren Sie $f'(x)$ linear um $\hat{x}$ und weisen Sie einen Nulldurchgang (Vorzeichenwechsel) von f' in $\hat{x}$ nach.

6.3 *Überlagerung zweier Schwingungen, Schwebungen:* Eine Schwingung der Kreisfrequenz ω_x werde durch die Funktion $x(t) = A_0 \cos(\omega_x t)$ in Abhängigkeit von der Systemzeit t

beschrieben. Nun wird dieser Schwingung eine zweite Schwingung $y(t) = A_0 \cos(\omega_y t)$ der Frequenz ω_y überlagert. Die resultierende Schwingung erzeugt Schwebungen, die durch eine einhüllende Kurve gegeben werden. Berechnen Sie die Frequenz der resultierenden Schwingung und die Frequenz der Schwebung. Hinweis: Zeigen Sie zuvor die Additionstheoreme des sin und des cos und wenden Sie das Additionstheorem des cos in geeigneter Weise an.

6.4 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotoniebereiche und lokale Extremalstellen:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$
b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$
c) $f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2-2t+2}}$
d) $f(t) = \frac{\ln(t^2+1)}{t^2+1}$

6.5 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte unter Anwendung der Regeln von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x}{1 - x^2}$
b) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 1)e^{1-x^2}$
c) $\lim\limits_{x\to 1} (\cos(x-1) - 1)(x-1)^{-2}$
d) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$
e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2 + 4)}{\sqrt{x^2 + 4}}$
f) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(2-x) \ln \frac{1}{(x-1)^2}$